L’analogia in ambito geometrico[1]

Silvia Sbaragli, Luigina Cottino, Claudia Gualandi, Giancarla Nobis, Adriana Ponti, Mirella Ricci[2]

Pubblicato in: Sbaragli S., Cottino L., Gualandi C., Nobis G., Ponti A., Ricci M. (2008). L’analogia in ambito geometrico. *Bollettino dei docenti di matematica*. 57, 71-92.

Abstract

In questo articolo viene proposta l’analogia come strumento didattico esplicito, per ragionare, pensare, sperimentare, porsi domande intelligenti ed acute. Prima se ne impossessano gli insegnanti, discutendo tra loro, facendo esperienza e, spesso, sorprendendosi, come capita alle persone curiose. Poi, con una sapiente trasposizione didattica, per mezzo di attività, problemi, giochi, discussioni, questo modo di ricercare viene proposto agli allievi.

1. L’analogia in aula. Dalla Prefazione di Bruno D’Amore e Martha Isabel Fandiño Pinilla

L’analogia regge il mondo. L’essere umano è alla costante ricerca di analogie, dovunque e sempre. Nella sua natura, c’è il bisogno di ancorarsi a qualche cosa di già conosciuto, di fronte al nuovo, per necessità mentale, per sfruttare strutture note, per sentirsi sicuro. L’analogia è una forma inconscia che determina le scelte: sapere che quel che sta per essere vissuto è del tutto sconosciuto, dà angoscia; sapere che ricalcherà esperienze analoghe precedenti, tranquillizza.
Ma a volte l’analogia è una falsa compagna di viaggio. Il bambino recita: io vado, tu vai, egli va, noi vadiamo…, per analogia, in questo caso traditrice. Perfino adulti vi diranno erroneamente che il successivo di 2,3 è 2,4 per falsa analogia con i numeri naturali.
(…) Dunque l’analogia ha una forza duplice:
da un lato offre appigli notevoli, un grande aiuto al pensiero creativo;
dall’altro lato, spesso è causa di speculazioni cognitive ed intellettuali; rompendo l’analogia, spesso in modo necessario, si apprende.
Ma allora, perché non portare a scuola l’analogia? «C’è già», diranno in coro i lettori. Sì, ma, come spesso capita alle cose intelligenti che sono nascoste, è implicita. La domanda vera è: perché non sfruttarla, nei due sensi visti prima, per confermarla o per smentirla, come strumento didattico? Cioè mostrando quando vale e quando non vale?

---

[1] Questo articolo è una sintesi del testo: Sbaragli et al. (2008).
[2] L. Cottino, C. Gualandi, G. Nobis, A. Ponti, M. Ricci da diversi anni fanno parte del R.S.D.D.M. (Gruppo di Ricerca, Sperimentazione e Divulgazione in Didattica della Matematica) dell’Università di Bologna e insegnano nella scuole elementari degli Istituti comprensivi “Vittorio Locchi” (plesso di via Cesari) e “Giusti D’Assisi” (plesso di via Palermo) di Milano. La coordinatrice Silvia Sbaragli appartiene al N.R.D. (Nucleo di Ricerca in Didattica della matematica) di Bologna e insegna all’Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

2. Da dove nasce l’esigenza dell’analogia

L’esigenza di sperimentare in classe questo argomento nasce da una ricerca pubblicata da Sbaragli nel 2006 a proposito della capacità degli insegnanti di scuola elementare di riconoscere *analogie*; tale sperimentazione ha coinvolto le autrici-maestre di questo libro da più punti di vista: come intervistate (inizio 2005) e intervistatrici (fine 2005). Questo lavoro punta l’attenzione sul passaggio tra piano e spazio, mettendo in relazione ciò che accade tra *perimetro e area di due figure piane* e tra *area e volume di due figure solide.*
Per poter comprendere a pieno il percorso seguito per giungere al testo: Sbaragli et al. (2008), occorre esplicitare che questa ricerca del 2006 segue un precedente lavoro riguardante le convinzioni di insegnanti e studenti relative alle relazioni tra *perimetro e area di una figura piana* (D’Amore, Fandiño Pinilla, 2005), nel quale si sono analizzate le convinzioni degli insegnanti e degli studenti sulle relazioni tra questi due concetti; convinzioni spesso basate su tentativi di confermare sempre maggiorazioni o minorazioni tra queste entità, una volta poste in relazione.
In particolare, le presunte relazioni di dipendenza stretta tra perimetro e area sul piano relazionale sono del tipo (D’Amore, Fandiño Pinilla, 2005, pp. 67-68):
«se A e B sono due figure piane, allora:

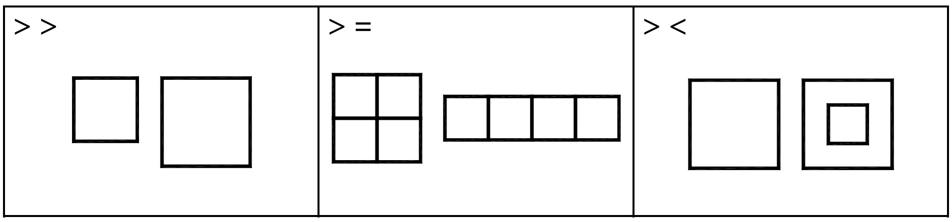
- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);
- e viceversa, scambiando l’ordine “perimetro - area” con “area - perimetro”».

In particolare, in tale ricerca è stato chiesto ad insegnanti e allievi di mettere in relazione i perimetri (**p**) di due figure con le loro rispettive aree (**A**), chiedendo di fornire un esempio per ciascuno dei seguenti 9 possibili casi (Figura 1); in questo modo si voleva evidenziare che le “relazioni” sopra riportate non valgono in modo acritico e generalizzato.

p	**A**	**p**	**A**	**p**	**A**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

Figura 1

Nella prima casella “> >” si chiede di trovare due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro cresca e l’area cresca; nella seconda “= >” due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro rimanga inalterato mentre l’area cresca; e così via.
Riportiamo di seguito un esempio di risoluzione che mostra tutti e 9 i casi.



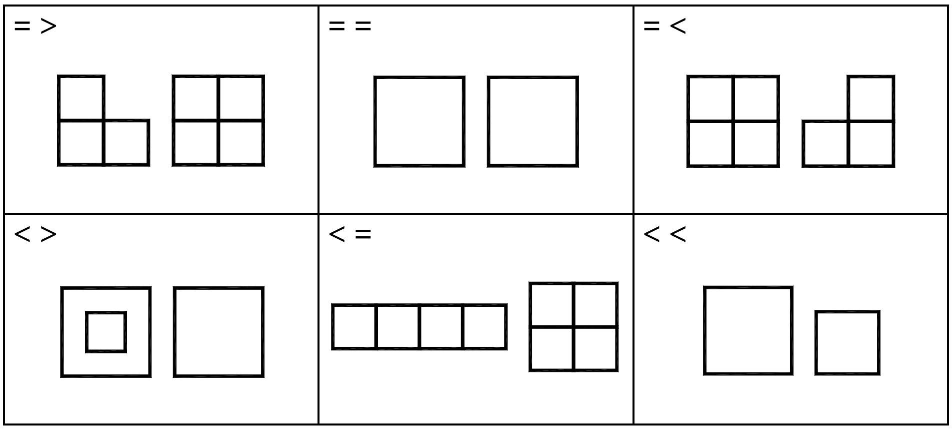


Figura 2

In particolare si osserva che se di una figura si sa la relazione del perimetro rispetto ad un’altra figura, nulla di pre-determinato si può sapere su che cosa avviene per l’area. I risultati ottenuti da D’Amore e Fandiño Pinilla (2005) rivelano le numerose difficoltà possedute da alcuni insegnanti e allievi di ogni livello scolastico ad accettare l’esistenza di tutti i 9 casi e a riuscire a trovare due figure per ogni casella; più in generale, dimostrano la presenza di numerose misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni, ritenute necessarie, tra la variazione del perimetro e dell’area in funzione della variazione di una figura piana: «Non avevo mai riflettuto da questo punto di vista, vedevo sempre figure singole. Eravamo abituati a pensare che se cresceva un aspetto cresceva anche l’altro» (insegnante di scuola elementare).
Più in generale, i risultati di questa ricerca mostrano che l’ostacolo che si oppone alla costruzione da parte degli studenti di una conoscenza riguardante le relazioni tra “perimetro ed area” non è solo di natura epistemologica, com’è stato rilevato dalla letteratura di ricerca, bensì soprattutto di natura didattica; esso quindi risiede soprattutto nelle scelte didattiche.
Si è partiti da questi interessanti risultati per studiare successivamente l’*analogia* tutta da confermare tra le relazioni attese, verificate o smentite, tra *perimetro ed area* di una figura piana, e quelle tra *area e volume* di una figura solida: perimetro sta ad area (in una figura piana) come area sta a volume (in una figura solida).
Questa ricerca sull’analogia (Sbaragli, 2006) è stata effettuata analizzando le risposte degli insegnanti autori di questo articolo all’inizio del 2005 e di altri insegnanti di scuola elementare e medie che sono stati intervistati dalle stesse autrici-maestre di questo articolo, dopo aver effettuato un anno di riflessione e studio personale e condiviso su questo tema.
Si è deciso di rivolgere l’attenzione solo ad insegnanti in quanto si è ritenuto che per questa problematica fosse questo il campione di analisi più interessante dato che, come afferma Zan: «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto» (Zan, 1998).
In questa ricerca ci siamo messi nella condizione di valutare se gli insegnanti che avevano preso possesso cognitivo delle relazioni tra perimetro ed area sapessero trasferirle, per analogia, a relazioni tra area e volume.
Dopo aver sottoposto la tabella della Figura 1 si erano mostrate le soluzioni di Figura 2 indipendentemente dalle prestazioni degli insegnanti intervistati; successivamente si è proposta la tabella della Figura 3, chiedendo agli insegnanti di riflettere su questi nuovi 9 casi nello spazio, dove **A** sta per area della superficie e **V** sta per volume. Si chiedeva

di valutare se i casi fossero tutti possibili e di produrre un esempio per ciascun caso ritenuto possibile.

A	**V**	**A**	**V**	**A**	**V**
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

Figura 3

In questo modo si voleva vedere se gli insegnanti erano in grado di sfruttare l’analogia tra piano e spazio, ossia tra ciò che avevano appena esaminato individualmente (Figura 1), o del quale erano venuti a conoscenza durante il colloquio con il ricercatore (Figura 2), e il nuovo problema proposto (Figura 3).
Anche in questo caso, il lavoro scritto individuale è stato fatto seguire da un’intervista per indagare le convinzioni e gli eventuali cambi di convinzioni degli insegnanti sulle presunte relazioni tra area e volume.

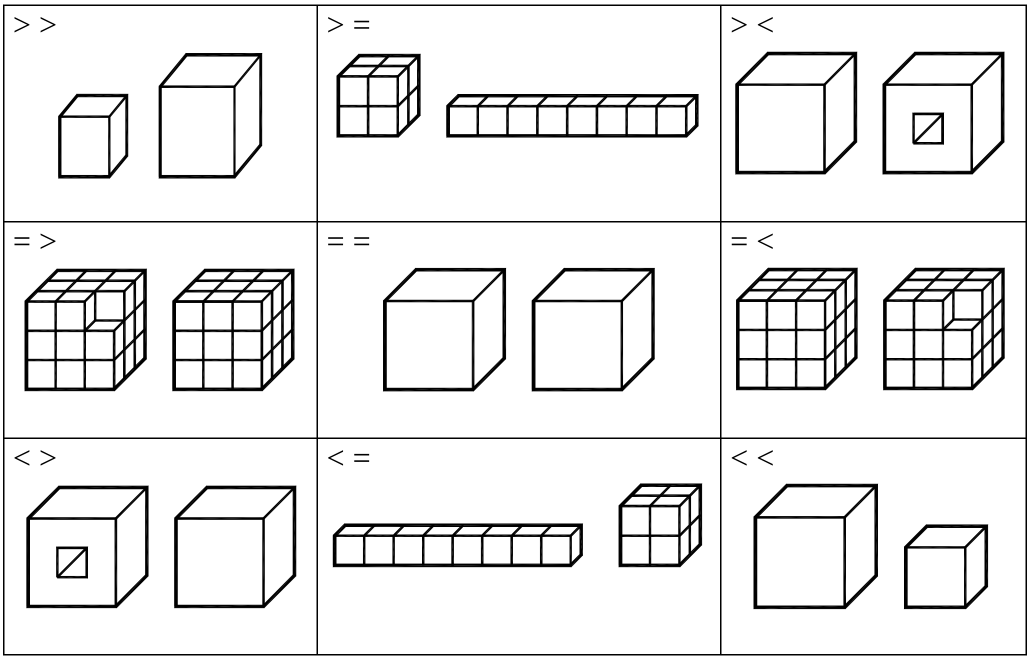


Figura 4

3. Risultati di ricerca

I risultati della ricerca di Sbaragli (2006) dimostrano che, presso gli insegnanti di scuola elementare e media, non vi è consapevolezza della mancata esistenza di relazioni obbligate e predeterminate tra area e volume di figure solide. Vi sono quindi notevoli problemi di costruzione concettuale in questo ambito che fan sì che l’ostacolo alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente delle relazioni tra “area e volume” di figure solide da parte degli studenti, rilevata dalla letteratura di ricerca, non è solo di natura epistemologica bensì prevalentemente di natura didattica, come è avvenuto per la ricerca citata in precedenza su “perimetro e area”. Anzi, i risultati

attestano che, in questo caso, gli ostacoli didattici sono ancora più accentuati, dato che alle presunte relazioni obbligate si sommano le difficoltà di gestione dello spazio. Gli insegnanti denotano poca abitudine a ragionare nello spazio e a gestire situazioni tridimensionali: «Nello spazio è veramente complicato», «Nel piano mi è capitato qualche volta di ragionare su figure lunghissime che poi avevano l'area minore rispetto ad un quadrato con lo stesso perimetro, allora mi è capitato di rifletterci, mentre nello spazio no, non mi è mai capitato»; «Devo ammettere che per me lo spazio è ignoto» (affermazioni di insegnanti intervistate). Questo era già stato messo in evidenza nel testo di Arrigo e Sbaragli (2004).
Molti insegnanti sostengono che il malinteso di pensare che l'aumento dell'area di una figura tridimensionale comporta necessariamente l'aumento del volume derivi da una mancanza di conoscenza di questo argomento e si ripromettono di includerlo nella propria azione didattica di insegnamento/apprendimento.

Ma ciò che interessa maggiormente in questa sede è che la quasi totalità degli insegnanti intervistati non è riuscita a cogliere l'analogia tra piano e spazio; ossia, i docenti non sono riusciti a sfruttare gli esempi del piano (prodotti o visti a posteriori) a sostegno di ciò che avviene nello spazio, affrontando la seconda situazione come se non avesse nulla a che vedere con la proposta precedente: «No, non ho più pensato alla situazione precedente», «Non ho pensato di utilizzare le stesse figure della prima tabella, non ho visto l'analogia, perché non mi sono mai trovata in una situazione simile. Come insegnante lavoro sul cambio di figura con lo stesso perimetro e la stessa area, ma non li metto in relazione. Nello spazio poi mai!», «Non ho pensato di utilizzare le stesse figure della prima tabella. Per me questi lavori sono completamente una novità. Non ho nella mia esperienza mai pensato di passare dal piano allo spazio trasformando le figure. Le figure del piano sono come staccate dalle figure nello spazio», «Lo spazio mi ha confuso, cercavo figure diverse, non ho fatto riferimento alle precedenti, non ci ho proprio pensato. Come sono lontani piano e spazio per me, e sì che avevo già visto i casi nel piano, ma non li ho visti come una possibilità per costruire nello spazio… erano nel piano».

Le motivazioni fornite dagli insegnanti della mancata messa in pratica dell'analogia rientrano tra le seguenti:
- incapacità: «Mi rendo conto che è importante e che queste cose non si fanno abbastanza a scuola. Bisogna farlo, ma io non so come farlo», «Non so, forse perché non ci si pensa, io non ne so abbastanza. Mi piacerebbe saperne di più. Fammi sapere di più, se hai materiale passamelo»;
- mancanza di tempo: «Ci vuole troppo tempo, si fa fatica a lavorare così»;
- mancanza di formazione: «I miei insegnanti non me ne hanno mai parlato»;
- mancanza di vera implicazione da parte dell'insegnante: «Il mancato uso è dovuto al fatto che l'insegnante vuole fare meno fatica. Pensare per analogia vuol dire ragionare e per far ragionare, devi preparare la lezione in un certo modo. Non ci poniamo questo obiettivo. La scuola va avanti con metodi vecchi».

I risultati di questa ricerca hanno così messo in evidenza che queste manchevolezze da parte degli insegnanti possono essere le cause delle carenze degli studenti evidenziate in una ricerca di Noss e Hoyles nel 1996, basate sull'incapacità di riuscire a fare auspicati collegamenti tra un sapere e l'altro.

Riteniamo importante sottolineare come il cambio di convinzione negli insegnanti, dal prima al dopo intervista, sia stato significativo, ed in parecchi casi abbia richiesto prove e riflessioni successive non banali. Perché avvenisse tale cambio, la maggior parte degli intervistati ha avuto bisogno di ricorrere agli esempi forniti dall'intervistatore. Quel che si evince, però, è che, dopo aver visto gli esempi, o creati dall'intervistato stesso o proposti dall'intervistatore, si sono attenuate le misconcezioni legate all'intuizione per quanto riguarda questi concetti geometrici e si è percepita l'utilità dell'analogia come strategia fondamentale per risolvere velocemente la situazione proposta.

4. Le personali convinzioni e i cambi di convinzioni delle autrici-maestre sottoposte alla ricerca

Le prestazioni iniziali ottenute dalle cinque autrici-maestre nel sottoporsi alla ricerca di D'Amore e Fandiño Pinilla (2005), relativa alla relazione tra perimetro e area di figure piane, sono confrontabili con i risultati ottenuti dalla ricerca accennati nel paragrafo 2.
Le maggiori difficoltà che hanno incontrato risiedono nei concetti che coinvolgono lo spazio, così come si rileva dalle affermazioni che sono state immediatamente esplicitate durante l'intervista: «Quando poi ci hai proposto la tabella per la relazione tra area e volume, ancora una volta mi sono detta che forse erano possibili tutti e nove i casi, ma ero molto in difficoltà a pensare alle figure da disegnare e con i volumi mi rendo conto che sono davvero con una fitta nebbia nel cervello», «Quando mi hai consegnato la seconda tabella con il rapporto area-volume, ho pensato per qualche secondo che potevano esserci esempi anche qui per i 9 casi, ma che avevo bisogno di trovarli per esserne sicura. Immediatamente mi sono bloccata e avevo la testa in panne perché non mi venivano in mente solidi per poter accontentare il primo esempio; il mio problema era: "Come faccio a dire se l'area è uguale, maggiore o minore visto che sono solidi?". Il tutto avveniva in pochi secondi. Io sentivo un forte imbarazzo e credo, a ripensarci bene, che il problema fosse che l'area dei solidi non è per me così semplice e di immediato possesso come concetto poiché c'è l'area laterale e quella delle basi, inoltre se penso a solidi di rotazione la difficoltà per me aumenta con l'area del cerchio, non parliamo poi della sfera. Ancora una volta il mio problema è stato un problema di misura che forse nasconde un problema di comprensione profondo dei concetti di area e volume».

Le autrici-maestre che non hanno pensato subito all'analogia tra spazio e piano, nelle interviste lo dichiarano apertamente: «Non ho trasferito nello spazio i casi che avevo rappresentato nel piano, non ho riconosciuto spontaneamente l'analogia tra i casi nel piano e nello spazio», «Neanche per un momento ho pensato che potevo trasferire almeno qualche esempio della prima tabella alla seconda».
Hanno inoltre parlato tra loro con estrema sincerità del disagio provato nell'affrontare questa richiesta e hanno manifestato il bisogno e la voglia di saperne di più: «Non sono molto fiera di me se ripenso alla reazione che ho avuto, ero convinta di essere un po' più capace sia da un punto di vista teorico che pratico. Questa tua proposta è l'ennesima situazione in cui mi trovo a ripensare profondamente alle mie conoscenze, alle mie convinzioni e mi rendo conto che devo approfondirle con un mio maggiore coinvolgimento (quello che di solito chiedo ai bambini)».
Soprattutto durante l'intervista sono emersi molti dubbi e considerazioni sull'azione didattica: «Mi sono detta che c'è una grossa difficoltà da parte mia a pensare per analogia e di conseguenza mi chiedo come e quanto ciò possa influenzare la mia attività di insegnante», «Ripensando a me, alla mia storia di studente, non ho ritrovato percorsi o momenti di studio che mi abbiano stimolato a cogliere analogie in matematica, mentre

penso con facilità alla analogia nella letteratura o in scienze, forse perché piano e spazio vengono ancora considerati per difficoltà due mondi separati con regole proprie senza alcuna relazione».

Venti giorni dopo la presentazione di questa ricerca, una autrice-maestra ha spedito la seguente lettera alla ricercatrice: «Insieme alle altre ho riprovato a capire e ad approfondire le relazioni delle due tabelle; non ti nascondo che ora con quella sul perimetro e l'area sono più sicura, ma con l'altra ho ancora parecchie perplessità e mi sono riproposta di lavorarci ancora da sola. A proposito della ricerca, mi sembra davvero bella e utile. Più di me chi può dirtelo? Ho toccato con mano come sia importante l'analogia nella risoluzione di problemi e come insegno male, non avendo per prima io capacità analogiche».
Questa iniziale situazione di disagio e smarrimento ha sollevato nelle autrici-maestre una gran voglia di approfondire tali situazioni, coinvolgendo tutte le insegnanti in uno studio individuale e di gruppo settimanale. Questo periodo di confronto, riflessione e studio è durato più di un anno, ed includeva anche incontri di approfondimento e formazione sui diversi aspetti del quadro teorico. Tale percorso ha prodotto un notevole cambio di convinzioni e una maggiore acquisizione di sicurezza su questi argomenti (e non solo). Ecco alcune affermazioni delle autrici-maestre: «Finalmente ora mi sento di poterne cogliere il significato con più consapevolezza», «La scoperta dell'esistenza dell'analogia illumina il sapere», «Nel mondo al di fuori della scuola si possono trovare molte situazioni in cui è in gioco la capacità di stabilire relazioni e di questo dovremmo tenerne conto. Io credo che molto più spesso dovremmo chiederci se quello che proponiamo ai nostri alunni è efficace oppure no senza aver paura dei cambi di convinzione», «Avere la possibilità di approfondire è fondamentale per essere insegnanti diversi, io sono diversa da prima con i miei alunni e ho delle soddisfazioni enormi, vedo i comportamenti dei bambini e ogni volta mi stupisco dei risultati che osservo»;[3] «Non trovo altre parole per dirti quanto sarebbe fondamentale per ogni insegnante poter entrare in un'altra fase della vita lavorativa: quella in cui sono messi a nudo i propri apprendimenti e la propria umanità con una profondità mai neanche immaginata».
Solo dopo un anno di formazione, le autrici-maestre si sono sentite in grado di effettuare le interviste ad altre insegnanti inerenti la ricerca di Sbaragli (2006) e di effettuare la trasposizione didattica di questo argomento della quale si riporta un esempio nel paragrafo 6.

5. Alcuni riferimenti teorici

Il quadro teorico di riferimento è legato a tre differenti tematiche:
1. area e perimetro, per la quale rimandiamo a D'Amore e Fandiño Pinilla (2005; 2006);
2. area e volume, per la quale rimandiamo a Sbaragli (2006);
3. analogia, rispetto alla quale abbiamo deciso, per non appesantire troppo la lettura, di limitare in questo articolo l'analisi solo a quei riferimenti bibliografici che, in qualche modo, hanno davvero condizionato l'indirizzo della nostra successiva sperimentazione.

Iniziamo dal significato del termine *analogìa*.

---

[3] Come sostengono Tirosh e Graeber (2003): «Le convinzioni possono essere un ostacolo ma anche una potente forza che permette di effettuare cambiamenti nell'insegnamento».

Nell'accezione comune della lingua italiana, per il termine *analogìa*, nell'Enciclopedia Treccani, Roma, 2002, si legge: "relazione di somiglianza, uguaglianza di rapporti, proporzione matematica". In particolare, l'origine più antica, come suggerisce la sua radice greca (analoghía), si fonda sul concetto matematico di proporzione che stabilisce una similitudine come uguaglianza di rapporti. Ma la nostra interpretazione trascende questo significato particolare e va anche oltre quella di Pesci (2002) che, a proposito di pensiero proporzionale, mette in evidenza l'ostacolo didattico che si può generare quando si punta esclusivamente l'attenzione su termini e proprietà che sembrano esclusivi del concetto di proporzione, senza far cogliere l'analogia strutturale tra le situazioni di proporzionalità ed altre situazioni moltiplicative, e soprattutto quando non si favorisce l'uso consapevole delle proprietà aritmetiche che, ancora prima dell'impatto con la proporzionalità, gli allievi conoscono già a proposito di rapporti ed uguaglianze.
Jacques Hadamard (1865-1963) fa riferimento all'importante ruolo che gioca il *pensiero analogico* durante il processo di scoperta: la nostra mente, anche inconsapevolmente, cerca analogie e costruisce le immagini anche attingendo a esperienze precedenti e immagini già consolidate.
Guy Brousseau (2004), in un articolo su una modellizzazione dell'insegnamento della matematica, afferma: «Il docente deve dunque dissimulare le sue intenzioni con un artificio didattico: scegliere domande le cui risposte possono essere costruite dall'allievo, ricorrere ad analogie, suggerire metodi ecc.».
Francesco Speranza (1988) sostiene in modo deciso l'importanza dell'analogia dal punto di vista didattico: «Corrispondenze e analogie strutturali, temi che, a sua volta, sono la chiave di volta del pensiero matematico-strutturale. A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscono a inventare qualche analogia, anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte fra quelle inventate».
Vinicio Villani (2006) ribadisce l'importanza di lavorare didatticamente riconoscendo analogie tra piano e spazio: «(…) nulla impedirebbe di accennare in termini intuitivi, fin da quando si svolge il programma di geometria piana, alle analogie e alle differenze con la geometria dello spazio; successivamente, nello svolgere il programma di geometria dello spazio, ciò consentirebbe viceversa di collegare in modo naturale le nozioni tridimensionali alle corrispondenti nozioni bidimensionali già studiate in precedenza evidenziandone analogie e diversità».
Gérard Vergnaud (2007) sostiene: «C'è un pericolo nel prendere oggetti di studio troppo piccoli: si rischia di non afferrare il processo organizzatore dello sviluppo. Questi processi si basano infatti su analogie, metafore e slittamenti di senso. A partire da certe regolarità osservate nella realtà, spesso prodotte dall'azione del soggetto, questi processi sfociano in costruzioni concettuali di alto livello, che non hanno più una relazione facilmente identificabile con le regolarità della realtà. Senza il linguaggio e i simbolismi sviluppati dalla cultura, sarebbe impossibile identificare queste costruzioni concettuali».
Efraim Fischbein (1985) ribadisce l'importanza dell'analogia in riferimento ai modelli intuitivi: «Compito della didattica della matematica è quello di correggere, migliorare, arricchire il fondamento intuitivo corrispondente ai vari "campi concettuali" matematici e, certamente, di migliorare il più possibile il controllo delle strutture concettuali. Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. (…) Lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti». A questo scopo, per superare difficoltà derivanti dal forte peso che hanno i modelli intuitivi, l'Autore consiglia, tra le strategie, proprio quella di fare ricorso all'uso dell'analogia.

Queste considerazioni spingono a voler trattare l'analogia, ma, come riferisce Luciana Bazzini (1995) citando Fischbein: «Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri. Se l'analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcetti o fraintendimenti (Fischbein, 1987; 1989)». In effetti, capita spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un problema da risolvere, tende a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto, tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono accettabili per quei particolari sistemi. Si parla, in questo caso, di analogie "tacite" che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo.
In ogni caso, con le specifiche cautele necessarie per una significativa didattica, nessuno mette in dubbio l'importanza dello sviluppo del pensiero analogico.
A questo proposito, Stavy e Tirosh (2001) sostengono l'importanza dell'analogia, affermando che lo scopo primario dell'insegnamento matematico e scientifico è quello di incoraggiare gli studenti a trasferire la conoscenza da un caso specifico ad altri. Eppure numerosi studi al riguardo hanno dimostrato che gli studenti non fanno tali auspicati collegamenti, spesso a causa dell'inadeguatezza del sistema formativo (Noss, Hoyles, 1996).
Così come fece Fischbein, anche Stavy e Tirosh (2001) propongono tra le metodologie che permettono di aiutare gli studenti a superare gli effetti delle regole intuitive, l'insegnamento per analogia.
Sempre a proposito della funzione del ragionamento analogico, nel processo di ristrutturazione della conoscenza individuale e del superamento di misconcezioni, va ricordato il lavoro di Brown e Clement (1989).
Attente riflessioni riguardanti l'analogia in situazioni problematiche sono fornite da Lucangeli e Passolunghi (1995). Le due autrici citano varie ricerche che si sono focalizzate su un particolare tipo di *transfer* che avviene quando si presenta un problema base e poi uno ad esso analogo (Reeves, Weisberg, 1993; 1994; Ross, 1987); sembra che siano proprio i dettagli del problema e il contesto in cui è stato appreso, a guidare il *transfer* che porta alla soluzione. In seguito le due autrici parlano in modo puntuale del *transfer* analogico, che avviene quando il problema di base e il problema *target* sono analoghi, cioè quando entrambi condividono la stessa struttura risolutiva; in tal caso la soluzione del problema base può essere trasferita al problema target (Gentner, Gentner, 1983).
Anche Bazzini (1995) sostiene l'importanza del pensare per analogia, concependola come una strategia fondamentale per aiutare gli allievi nella costruzione del sapere, in una continua interazione tra ciò che si sa già e ciò che deve essere acquisito. Per l'autrice, il pensare per analogia aiuta a codificare e organizzare le nuove conoscenze, a recuperare quelle archiviate in memoria e a creare nuovi schemi concettuali, in linea con il pensiero di Mason (1992), che considera l'analogia uno strumento potente per apprendere in maniera relazionale, ossia connettere "pezzi" di sapere disponendo di sistemi di riferimento atti a strutturare e comprendere campi problematici nuovi, senza rimanere bloccati da una conoscenza "inerte".
In particolare, Bazzini (1995) sottolinea contemporaneamente l'importanza didattica e la necessaria cautela che occorre adottare nel far uso dell'analogia: «Il ragionamento analogico da una parte richiede e dall'altra stimola la flessibilità mentale, facilitando l'apprendimento. Come abbiamo già osservato, si tratta dunque di liberare la

conoscenza “inerte” e utilizzarla in situazioni nuove. Naturalmente, l’uso dell’analogia nell’istruzione non è esente da rischi e non per niente l’analogia viene definita una “lama a doppio taglio” (...)».

Per la nostra trattazione risulta cruciale anche il concetto di *metafora*.
Nel Dizionario Enciclopedico La Repubblica del 2003 è riportato: «Le definizioni tradizionali della M. si possono compendiare nella seguente: sostituzione di una parola con un’altra il cui senso letterale ha una qualche somiglianza col senso letterale della parola sostituita. La M. infatti è stata classificata dalla retorica classica come “tropo” e i tropi sono figure di sostituzione che vertono su parole singole. Il luogo che viene applicato per trovare questo tropo è il locus a simili, la somiglianza; il procedimento è la contrazione di un paragone: si identifica un’entità con quella con cui essa viene confrontata; donde la definizione di M. come *similitudo brevior*».
Ma come è sostenuto anche da Andriani et al. (2005), nel Novecento la metafora è passata da concezioni tradizionali come quella sostitutiva e comparativa, che la collocavano in un ambito esclusivamente linguistico, ad una concezione centrata invece sulla sua natura concettuale.
Le scienze cognitive hanno così osservato che l’ambito nel quale si collocano le metafore non sia da considerarsi quello esclusivamente linguistico, ma pervade la vita quotidiana e in particolare il comportamento comunicativo.
L’entrata della metafora nella scienza è avvenuta soprattutto grazie al testo di Black (1954) nel quale viene proposta la teoria dell’interazione che evidenzia una connessione tra metafore e modelli nelle teorie scientifiche.
Inoltre Lakoff e Johnson (1980) mettono in evidenza come la metafora venga intesa come una proiezione sistematica di strutture concettuali da un dominio a un altro, evidenziandone il ruolo all’interno del linguaggio ordinario.
Il ruolo della metafora nel nostro sistema concettuale, nella percezione delle cose che ci circondano, sul come interagiamo con il mondo fisico e su come comunichiamo con gli altri, ha portato anche a riflessioni specifiche nel campo della matematica.
Da questo punto di vista va citata la *teoria della conoscenza incarnata* (*embodied cognition theory*) di Lakoff e Nuñez (2000) che consiste nella scienza dei processi cognitivi basati sulla nostra fisicità di esseri umani, sia per quanto riguarda il corpo che il cervello. Questa teoria della conoscenza, che ha ampiamente fatto discutere in positivo e in negativo il mondo intero,[4] attribuisce un ruolo fondamentale alla *metafora* considerandola come un importante strumento cognitivo. Questo nuovo approccio cognitivo mette in evidenza come la matematica sia generata, oltre che dalla nostra lunga storia sociale e culturale, anche dalla nostra capacità metaforica di collegare domini diversi e di adattarci al mondo. Le nuove conoscenze sono costruite sulla base di schemi-preesistenti e l’interazione con la realtà gioca un ruolo cruciale nell’apprendimento. La metafora concettuale di Lakoff e Nuñez è intesa come una struttura che consente di comprendere concetti astratti in termini concreti, utilizzando idee e modelli di ragionamento fondati nel sistema senso-motorio. Questa metafora viene intesa come una “mappatura” tra due domini concettuali differenti che permette di esportare la struttura di un dominio concettuale “sorgente” a un dominio concettuale “obiettivo”, per ragionare su quest’ultimo come se fosse il primo. Per i due Autori, il pensiero metaforico è quindi parte essenziale del ragionamento, in particolare matematico.

[4] Per un approfondimento critico di questa teoria si veda Robutti (2006).

Al di là delle critiche che possono essere fatte a questa teoria, a noi interessa riconoscere un ruolo alle metafore come strumento cognitivo; ruolo riconosciuto didatticamente anche dalla Sfard (2002) che le reputa decisive nel processo di reificazione dei concetti a partire da esperienze di vita reale, attraverso l'uso di strutture linguistiche, che consentono di trasformare determinati processi in un oggetto matematico (Sfard, 2002).

Nei paragrafi seguenti si propone dunque un esempio del rendiconto dell'esperienza di apprendimento e di ricerca - azione messa in atto dalle 5 insegnanti di scuola elementare, autrici di questo articolo.
Lo studio consapevole e adulto, dai punti di vista matematico, epistemologico e didattico, ha portato le componenti del gruppo ad esprimere le loro convinzioni matematiche, epistemologiche e didattiche preliminari, a prendere coscienza di cambiamenti anche notevoli circa tali convinzioni; il che ha costretto, sempre in àmbito di ricerca - azione, a rivedere le proprie posizioni per quanto concerne la trasposizione didattica.
La ricerca - azione è una ben nota metodologia di ricerca che affonda le sue radici in lavori degli anni '40 negli USA, specie di Lewin (1946), ma che ha trovato una significativa sistemazione concettuale nel mondo della scuola, soprattutto in Australia, negli Stati Uniti e in Gran Bretagna. È contraddistinta da una doppia funzione dell'insegnante - ricercatore, dallo studio approfondito di un tema di ricerca, dall'analisi dei prodotti dei propri allievi in termini di ricerca e, non ultimo, anzi, in questo caso prioritario, l'osservazione di sé stessi nel fare ricerca. Nel nostro caso, ci preme evidenziare come «la ricerca - azione porta il ricercatore a interagire con l'oggetto della ricerca e quindi a essere direttamente implicato» (Canevaro, Gaudreau, 1988).
Questa idea è stata ripresa in àmbito matematico da diversi autori, si veda ad esempio D'Amore (1991).
Con questi presupposti, vedremo nel paragrafo 8 un confronto tra la propria azione in aula ed il proprio (nuovo) apprendimento critico (matematico, epistemologico, didattico), grazie alle auto-dichiarazioni esplicite delle insegnanti che hanno partecipato alla ricerca.
La metodologia scelta per questo resoconto è la *learning story*, con interventi diretti dei partecipanti, secondo la metodologia della riflessione personale (autobiografia). Questa tecnica viene molto usata con profitto dalla ricerca in contesto internazionale da tempo; ne è prova il lavoro anticipatore di Gudmundsdottir (1996), nel quale si usa la *metafora dell'iceberg* per illustrare come la punta emergente corrisponde a quanto viene dichiarato come risposta (esplicita) da un insegnante ad una domanda nel corso di una intervista, mentre la parte maggiore (implicita) è quella nascosta sotto l'acqua; essa può emergere solo grazie ad una narrazione personale.
Da questo punto di vista, ricordiamo il lavoro di Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla e Sbaragli (2006) dove viene presentato il resoconto di un'esperienza di apprendimento e di ricerca - azione messa in atto da parte di un gruppo di 36 insegnanti (di scuola dell'infanzia, elementare e secondaria di I grado) sul tema delle frazioni sfruttando la metodologia della learning story, al quale rimandiamo per maggiori approfondimenti bibliografici.

6. Il senso delle proposte

Le proposte didattiche pensate, progettate e realizzate dalle autrici-maestre riguardano il passaggio tra piano e spazio e viceversa, alla ricerca di eventuali analogie tra questi due

ambiti. Tali esperienze sono state condotte nelle diverse classi di scuola elementare ma sono state pensate, progettate e discusse sempre in gruppo da parte delle insegnanti.
Nella fase di progettazione comune, ciascuna insegnante si è sentita lentamente cambiare e diventare più consapevole del significato di quei nove riquadri delle tabelle della ricerca. Questa esperienza ha consentito agli insegnanti di capire concretamente e in modo sempre più approfondito che cosa significa pensare in termini di analogia: fare distinzioni, riconoscere determinati limiti, operare scelte, confronti, …
Raggiungere tale consapevolezza da parte dell'insegnante, permette di gestire al meglio la situazione di classe in modo da trasferire agli allievi una strategia potente che permette loro di essere sempre più padroni delle diverse situazioni, per rendere più forti e consapevoli le loro conoscenze e competenze.
Il pensiero analogico, ad esempio in geometria, consente di considerare lo spazio e il piano contemporaneamente: si è nello spazio e ci si domanda qual è il poliedro che è formato dal minor numero di facce, ci si sposta nel piano e ci si fa una domanda analoga (Arrigo, Sbaragli, 2004; Cottino, Sbaragli, 2005). Naturalmente si deve cambiare linguaggio o trovarne uno che si adatta a entrambi gli ambienti. Si può parlare di poliedri e di poligoni, di facce per il tetraedro e di lati per il triangolo, oppure, si può trovare un linguaggio unificante, parlando degli elementi che delimitano le figure. Il tetraedro è una parte di spazio delimitata dal minor numero di facce (4), così il triangolo è una parte di piano delimitata dal minor numero di lati (3).
Il pensiero analogico permette, per esempio, di lavorare su concetti fondamentali quali perimetro, area e volume facendone comprendere le caratteristiche attraverso la ricerca e la rappresentazione di tutte le relazioni possibili, nel piano tra perimetro e area e nello spazio tra area e volume. Il pensiero analogico permette di trasferire relazioni, quindi conoscenze, da un contesto a un altro, in questo caso dal piano allo spazio e viceversa, senza dover sempre ricominciare da capo.
Lo studio contemporaneo dei concetti precedentemente indicati apre allo studio delle grandezze corrispondenti e delle rispettive unità di misura.
Anche in questo caso, si può trovare un'analogia tra il calcolo dell'area e del volume sia pure nella differenza delle due grandezze di riferimento: come per passare dalla grandezza lunghezza alla grandezza area si usa la moltiplicazione, così per passare dalla grandezza area alla grandezza volume si usa la moltiplicazione.
La presentazione contemporanea di due problemi con la richiesta di confrontarli favorisce nei bambini un atteggiamento di ricerca di somiglianze e differenze e sviluppa la capacità di scegliere quali elementi mettere in relazione per rappresentare le situazioni e per trovare le soluzioni.
Come affermano Andriani et al. (2005): «(…) la prima fase dell'apprendimento è quella dell'*assimilazione*, nel corso della quale si stabiliscono delle analogie, si fanno confronti, si cercano somiglianze e differenze con le conoscenze anteriori. Se le informazioni ricevute e riorganizzate sono giudicate conformi a ciò che si sa già, non si apprende niente di nuovo. La situazione a cui si è posti di fronte non si configura come un vero problema, ci si esercita, si hanno conferme, si rinforzano le conoscenze precedenti. Se, al contrario, ci si rende conto che le conoscenze che si possiedono non consentono di assimilare i nuovi dati della situazione, oppure che quelle stesse conoscenze si rilevano insufficienti, si instaura un disequilibrio. La situazione si pone come un reale problema da risolvere e le conoscenze precedenti costituiscono un ostacolo che bisognerà eliminare».
L'allievo che pratica il confronto e la messa in relazione acquisisce così lentamente la capacità di riflettere sul proprio lavoro cognitivo mettendo in corrispondenza ciò che già

conosce con ciò che sta esplorando. Inoltre, nei casi in cui l'intuizione gioca un ruolo deviante, il riconoscere analogie può far superare veri e propri blocchi.
Concludiamo questo paragrafo, affermando ancora una volta che lavorare con l'analogia è mettersi gli "occhiali del matematico" (Cottino, Sbaragli, 2005); questa metafora ha molta presa sui bambini, li aiuta a capire che il confronto tra due situazioni presuppone una contestualizzazione e la ricerca di ciò che le caratterizza individualmente, per poterle poi mettere in relazione.

7. Immaginiamo e scegliamo

Proponiamo un'attività realizzata in terza elementare che rientra all'interno di un lungo percorso intrapreso dalle autrici-maestre dalla prima alla quinta e che è interamente presentato in Sbaragli et al. (2008). In particolare, nelle seguenti situazioni si è indagata l'analogia tra le relazioni: p >, A < e A >, V <; p <, A > e A <, V >.

Immaginiamo in 2D
Si è chiesto agli allievi:
Immaginate e disegnate due figure in 2D in modo che una delle due abbia perimetro minore e area maggiore dell'altra.

Per rispondere alla consegna è importante ricorrere anche a figure concave ma, da questo punto di vista, gli allievi si sono trovati inizialmente in difficoltà, pur avendo già conosciuto questo tipo di figure.
Per fortuna ci sono quei bambini che, di fronte a una provocazione, pensano alle esperienze passate, le ricordano e le mettono a disposizione della classe.
Durante queste attività, gli allievi sono liberi di muoversi nell'aula e, quando sono in difficoltà, si rivolgono ai compagni che secondo loro sono in grado di aiutarli; la richiesta di aiuto comporta una discussione che arricchisce tutti; più di una volta abbiamo infatti notato che la spiegazione tra pari è molto efficace e aiuta nella fase di socializzazione del sapere. Questo è in linea con ciò che sosteneva Vygotskij (1896-1934) a proposito di *problem solving collaborativo*, cioè affrontato dall'apprendente sotto la guida di un adulto o in collaborazione con un coetaneo più capace. Fondamentale, da questo punto di vista, è l'appartenenza a una società all'interno della quale l'apprendente è inserito: «L'apprendimento umano presuppone una natura sociale specifica e un processo attraverso il quale i bambini si inseriscono gradualmente nella vita intellettuale di coloro che li circondano» (Vygotskij, 1931-1980).
In questa sperimentazione, l'aiuto reciproco ha permesso a tutti di disegnare le figure secondo la relazione richiesta.
L'uso degli oggetti messi a disposizione per l'attività (figure di cartoncino in 2D e di legno in 3D) ha favorito una profonda riflessione sulle figure convesse e concave e ha sollecitato una attenta riflessione sugli elementi da confrontare.
I bambini conoscevano molto bene gli oggetti forniti, li avevano già usati per giocare in diverse situazioni, perciò non erano disturbati da caratteristiche percettive non rientranti in ambito matematico come il colore, il tipo di materiale, …
Riportiamo di seguito i disegni prodotti da un gruppo:

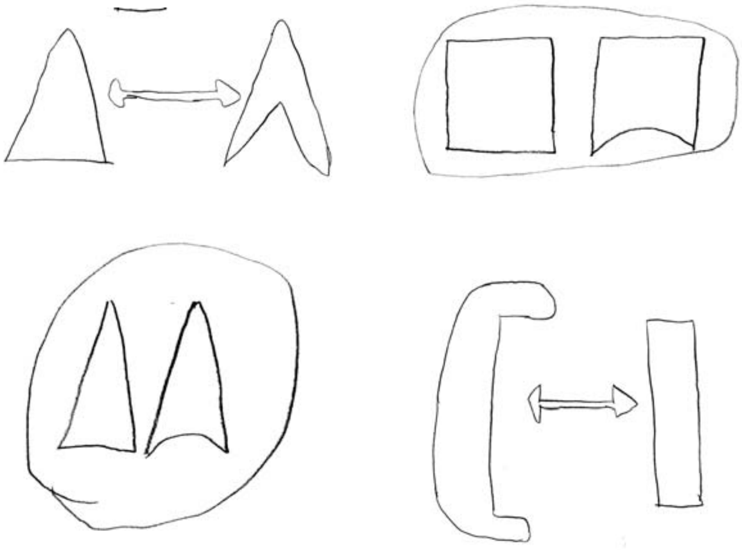


Figura 5

Anche se i disegni realizzati dai bambini sono molto imprecisi, mettono ugualmente bene in evidenza la scelta delle figure concave per soddisfare la richiesta.
Vogliamo soffermarci sul lavoro di Niccolò che ha disegnato un cerchio e una corona circolare e poi li ha cancellati.

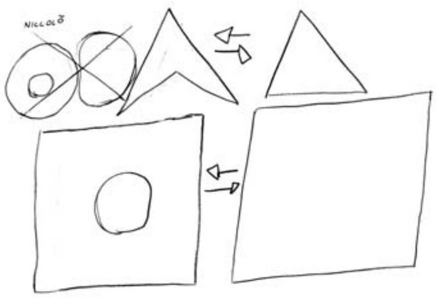


Figura 6

Dopo aver analizzato con l'intera classe il lavoro di Niccolò, gli abbiamo chiesto il perché della cancellazione. La sua risposta è stata: «Io dicevo "no" perché pensavo che in un cerchio non si poteva contare la superficie perché dicevo che solo in una figura con gli angoli si poteva contarla».
(Riteniamo che la discussione collettiva su un lavoro personale sia utile e proficua non solo per il bambino che l'ha prodotto ma anche per gli altri che possono avere la stessa convinzione, pur non avendola esplicitata, o per noi insegnanti che abbiamo così l'occasione di capire che cosa veramente pensano i nostri allievi) (Bartolini Bussi, 1989 a, b).
Dopo la discussione, Niccolò chiede di poter riscrivere le sue scoperte su un foglio e le riporta in questo modo:

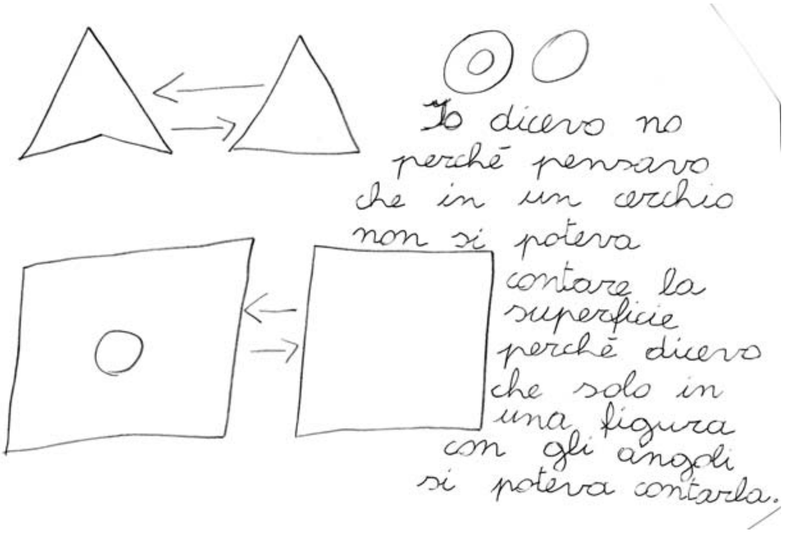


Figura 7

Abbiamo fatto presente agli alunni che il problema sollevato da Niccolò è stato un problema anche per i matematici, nel senso che il calcolo delle aree delle figure piane più comuni era già noto fin dai tempi di Talete di Mileto (624 circa-548 circa a.C.) e anche prima, e comunque era ben dimostrato ai tempi di Euclide di Alessandria (IV-III sec. a.C.).
Ma quando la figura non è più un poligono, come ad esempio un cerchio, per il calcolo dell'area bisogna aspettare matematici più sofisticati come Archimede di Siracura (287-212 a.C.) o, in epoca più recente, Evangelista Torricelli (1608-1647) e Bonaventura Cavalieri (1598-1647) e, per una sistemazione moderna, addirittura i matematici tedeschi del XIX secolo.
È stata un'occasione per rendere partecipi i bambini di alcuni momenti della storia della matematica: anche loro, come i matematici della storia, possono vivere gli stessi tipi di problemi.

Scegliamo in 3D
Fra tutte le figure tridimensionali che vedete sul tavolo, cercate due figure in modo che una delle due abbia l'area minore e il volume maggiore dell'altra.

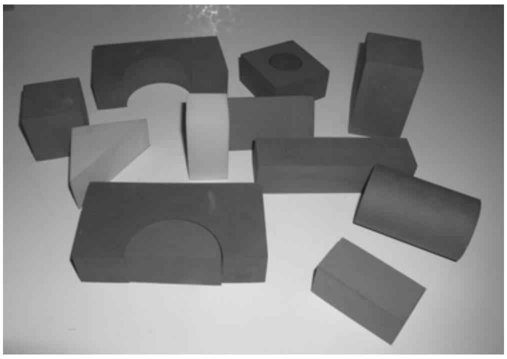


Figura 8

La scelta delle figure concave in 2D ha influenzato l'esperienza in 3D.

Molti bambini hanno cercato figure analoghe togliendo da un parallelepipedo quella che potremmo chiamare una “lunetta”, così come in 2D avevano tolto una parte del rettangolo trasformando un tratto del segmento-contorno in una linea curva.

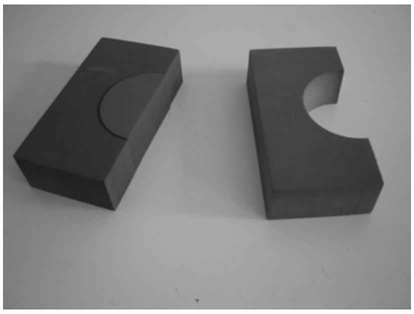
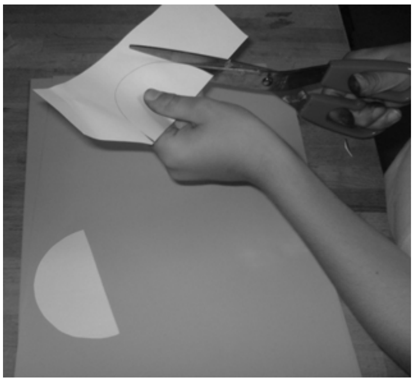


Figura 9

Ma i bambini hanno dato per scontato che togliendo una parte di una figura si ottiene sempre una figura di area maggiore, applicando una falsa analogia tra piano e spazio: “la concavità nel piano fa aumentare il perimetro, la concavità nello spazio farà aumentare l’area”, pur essendo anche nel piano una considerazione non sempre vera. Gli allievi hanno applicato un criterio che poteva essere vincente: “togliere” una parte di figura, ma in modo scorretto; in effetti non hanno tenuto conto che per ottenere una figura di area maggiore occorre “togliere” una parte di figura in particolari modi.
La seconda figura, ottenuta togliendo la lunetta, ha in effetti area minore del parallelepipedo iniziale; ma di questo inizialmente gli allievi non si erano accorti, dato che si erano dimenticati di considerare le aree delle due figure parallele e congruenti della lunetta che avevano eliminato. Solo sfruttando pezzi di carta per confrontare le due superfici, gli allievi si sono resi conto dell’interpretazione scorretta iniziale.



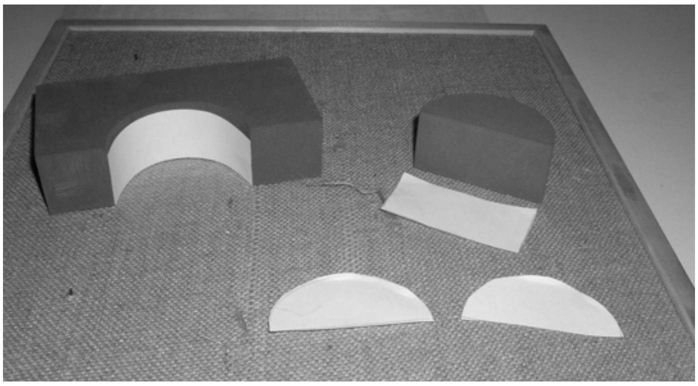


Figure 10 Figura 11

Successivamente ci siamo posti il seguente problema: «Come devo modificare una figura perché l’area della nuova figura sia maggiore di quella di partenza?».
Abbiamo fatto l’esperienza del “togliere” con i cubetti di legno.

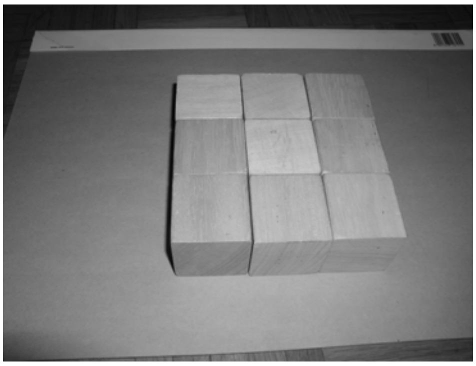
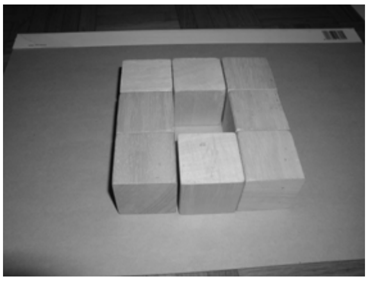
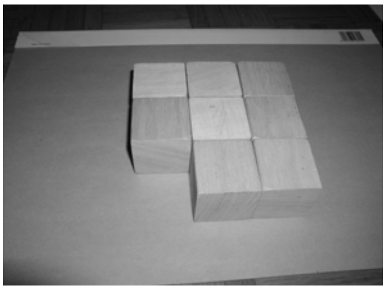


Figura 12





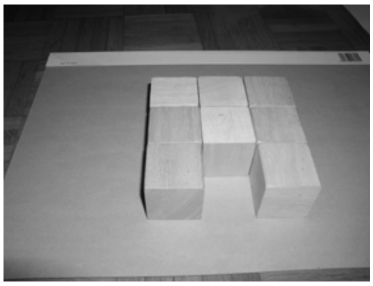


Figura 13 Figura 14 Figura 15

Come si può vedere dalle figure 13, 14 e 15, il "togliere" non comporta necessariamente una diminuzione di area, ma tipologie diverse: nella prima figura l'area è maggiore di quella di partenza, nella seconda è minore e nella terza è uguale.

8. Le nostre convinzioni oggi

Le 5 autrici-maestre al termine della loro esperienza di ricerca-azione nelle diverse classi di scuola elementare affermano: «Ogni volta che rileggiamo la frase di Speranza (1988): "A mio avviso il ritrovare analogie è uno dei momenti essenziali del pensiero critico: ritengo che sia utile lasciare che gli allievi si sbizzarriscano a inventare qualche analogia anche se poi una più attenta critica potrà farne dimenticare molte tra quelle inventate", non possiamo non riandare ai nostri anni di studio, al tempo delle elementari, al tempo delle medie, al tempo delle magistrali (una volta si chiamavano così e duravano quattro anni). Non abbiamo mai incontrato un insegnante di matematica che ci avesse parlato dell'analogia o che, pur non pronunciando mai la parola analogia, ci avesse introdotto esplicitamente all'idea che si potesse ragionare e riflettere in modo consapevole sulle somiglianze e differenze tra diverse situazioni.
Se poi pensiamo a tutti i corsi di formazione proposti dal Ministero della Pubblica Istruzione, le cose non sono andate meglio.
Per molto tempo, nelle nostre classi abbiamo dato poco spazio all'idea che quello che vale in un certo ambito potrebbe valere anche in un altro, abbiamo sempre chiesto spiegazioni con tutti i passaggi ben evidenziati. Abbiamo insegnato a cercare somiglianze e differenze ma siamo rimaste al livello della descrizione, senza favorire nei nostri alunni la formazione di una pratica che attraverso l'analogia potesse aiutarli a risolvere problemi.

A posteriori possiamo dire che, soprattutto all'inizio del nostro insegnamento, l'azzardare soluzioni attraverso l'analogia, certamente ci avrebbe messo in difficoltà, un ragionamento esplicitato in tutti i suoi passaggi ci dava più sicurezza e possibilità di controllo.
Dobbiamo aggiungere anche che il libero pensiero dei nostri bambini ci avrebbe spaventato: non sapevamo dove ci avrebbe portato e come avremmo potuto utilizzarlo. Volevamo sempre arrivare al nocciolo della questione senza tanti "scarti".
Come sempre, il cambiamento è avvenuto in seguito ad una frustrazione: noi stesse, sottoposte a un problema di carattere geometrico, come abbiamo indicato nei precedenti paragrafi, non siamo state in grado di risolverlo, non siamo state cioè in grado di dire che le relazioni tra perimetro e area nel piano potevano avere un analogo anche tra area e volume nello spazio. Non abbiamo visto l'analogia tra il piano e lo spazio. Per fortuna eravamo un gruppo e abbiamo cominciato a lavorare sull'analogia, abbiamo cominciato a studiare con entusiasmo e umiltà. Per l'ennesima volta nella nostra carriera di insegnanti, ci siamo trovate a rivedere il nostro modo di insegnare, a fare i conti con una nostra incapacità che influiva negativamente sui bambini.
Applicare il metodo dell'analogia comporta però un sapere matematico sicuro; senza questo sapere non saremmo state capaci di affrontare i pericoli dell'analogia dai quali ci mette in guardia Fischbein (1987; 1989). Quindi, per imparare a ragionare per analogia abbiamo dovuto anche approfondire la conoscenza della matematica stessa.
L'analogia comporta l'incontro con le esperienze passate: bisogna imparare a rendere sempre utilizzabile il sapere già acquisito.
Ma queste sono parole; come si fa a farle diventare pratiche quotidiane?
Abbiamo pensato di proporre ai nostri bambini la drammatizzazione della soluzione di un problema, non per mostrare una via da seguire, ma per mostrare che cosa accade dentro di noi, quando siamo di fronte a un problema che ci appare oscuro.
Abbiamo potuto constatare che l'offerta della nostra umanità di insegnanti che si mostra in una condizione simile alla loro, seppur drammatizzata, ha permesso ai bambini di "capire" che per imparare la matematica e per imparare a lavorare per analogia, occorre mettersi in gioco sul piano delle conoscenze, del metodo, dei sentimenti. Hanno incominciato a capire che la soluzione di un problema comporta uno sguardo al passato, per scegliere ciò che sarebbe utile confrontare con la situazione proposta; un confronto tra elementi analizzati, quello nuovo e quelli del passato, sulla base di somiglianze e differenze; una decisione sulla base di una analogia riconosciuta o sulla base di una analogia impossibile.
Questo percorso rappresenta per noi solo una tappa di un continuo cambiamento che coinvolge noi insegnanti e i nostri allievi, per questo vogliamo concludere con la seguente frase di Seneca che rispetta pienamente ciò che stiamo provando a conclusione della stesura di questo percorso: "*Continua ciò che hai cominciato e forse arriverai alla cima, o almeno arriverai in alto ad un punto che solo tu comprenderai non essere la cima*"».

Bibliografia

Andriani M.F., Dallanoce S., Falcade R., Foglia S., Gregori S., Grugnetti L., Maffini A., Marchini C., Rizza A., Vannucci V. (2005). *Oltre ogni limite.* Bologna: Pitagora.
Arrigo G., Sbaragli S. (2004). *I solidi. Riscopriamo la geometria.* Roma: Carocci.

Bartolini Bussi M. (1989a). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica. Parte I. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 12, 1, 5-49.

Bartolini Bussi M. (1989b). La discussione collettiva nell'apprendimento della matematica: analisi di due casi. Parte II. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 12, 5, 615-654.

Bazzini L. (1995). Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica: considerazioni teoriche e didattiche. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 2, 107-129.

Black M. (1954). Mathaphor. *Proceedings of the Aristotelian Society*. 55, 173-94. [Traduzione italiana in: Black M. (1983). *Modelli archetipi metafore*. Parma: Pratiche].

Brousseau G. (2004). Una modellizzazione dell'insegnamento della matematica. *Bollettino dei docenti di matematica.* 49, 11-32.

Brown D.E., Clement J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*. 18, 237-261.

Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. *La matematica e la sua didattica.* 3, 353-400.

Canevaro A., Gaudreau J. (1988). *L'educazione degli handicappati*. Roma: NIS.

Cottino L., Sbaragli S. (2005). *Le diverse "facce" del cubo.* Roma: Carocci.

D'Amore B. (1991). Ricerca-Azione, possibile paradigma della ricerca in didattica. *La Scuola Se*. 79-80, 14-17.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 165-190.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Trento: Erickson.

Fischbein E. (1985). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (Ed.). *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.

Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics.* Dordrecht: D. Reidel Publ. Company.

Fischbein E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning or Mathematics.* 2, 9-14.

Gentner D., Gentner D.R. (1983). Flowing Water or Teaching Crowds: Mental Models of Electricity. In: Gentner D., Stevens A. (Eds.). *Mental Models.* Hillsdale: Erlbaum.

Gudmundsdottir S. (1996). The Teller, the Tale, and the One Being Told: The Narrative Nature of the Research Interview. *Curriculum Inquiry*. 26(3), 293-30.

Lakoff G., Johnson M. (1980). *Metaphores we live by*. Chicago: University of Chicago Press. [Traduzione italiana in: Lakoff G., Johnson M. (1998). *Metafora e vita quotidiana*. Milano: Bompiani].

Lakoff G., Nuñez R. E. (2000). *Da dove viene la matematica.* Torino: Bollati Boringhieri.

Lewin K. (1946). Action Research and Minority Problems. *Journal of Social Issues.* Vol. 2.

Lucangeli D., Passolunghi M.C. (1995). *Psicologia dell'apprendimento matematico.* Torino: UTET.

Mason L. (1992). *Reti di somiglianze.* Milano: Franco Angeli.

Noss R., Hoyles C. (1996). *Windows on mathematical meanings: Learning cultures and computers.* Dordrecht: Kluwer.

Pesci A. (2002). *Lo sviluppo del pensiero proporzionale nella discussione di classe.* Bologna: Pitagora.

Reeves L.M., Weisberg R.T. (1993). On the concrete nature of human thinking: content and context in analogical transfer. *Educational psychology.* 13, 245-258.

Reeves L.M., Weisberg R.T. (1994). The role of content and abstract information in analogical transfer. *Psychological Bulletin.* 115, 381-400.

Robutti O. (2006). Embodied cognition e didattica della matematica. *La matematica e la sua didattica.* 20, 2, 163-186.

Ross B. H. (1987). This is like that: the use of earlier problems and the separation of similarity effects. *Journal of Experimental psychology: learning, memory and cognition*. 13, 4, 629-639.

Sbaragli S. (2006). La capacità di riconoscere “analogie”: il caso di area e volume. *La matematica e la sua didattica.* 2, 247-285.

Sbaragli S., Cottino L., Gualandi C., Nobis G., Adriana Ponti A., Ricci M. (2008). *L’analogia, aspetti concettuali e didattici. Un’esperienza in àmbito geometrico.* Roma: Armando Armando.

Sfard A. (2002). Thinking in Metaphors and Metaphors for Thinking. In: D. Tall, M. Thomas (Eds.). *Intelligence, Learning and Understanding in Mathematics. A tribute to Richard Skemp*. Flaxon: Post Pressed. 79-96.

Speranza F. (1988). Salviamo la geometria! *La matematica e la sua didattica.* 2, 3, 6-13.

Stavy R., Tirosh D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.

Tirosh D., Graeber A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 643-687.

Vergnaud G. (2007). La concettualizzazione nell’attività degli allievi e nella pratica degli insegnanti. In: D’Amore B., Sbaragli S. (Eds.). (2007). *Allievi, insegnati, sapere: la sfida della didattica della matematica.* Atti del convegno: “Incontri con la matematica n. 21”. 2-3-4 novembre 2007. 27-34.

Villani V. (2006). *Cominciamo dal punto.* Bologna: Pitagora.

Vygotskij L.S. (1931-1980). *Il processo cognitivo.* Torino: Boringhieri.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.